



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



1. El método de la bisección

Resuelva las siguientes ecuaciones con el método de la bisección, empezando con los valores de a y b indicados, con un error menor que una milésima.

- 1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 7 = 0$; $a = 1$, $b = 2$. Solución: 1.364
- 2) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 18x - 20 = 0$; $a = 2$, $b = 4$. Solución: 3.235
- 3) $f(x) = 4x^3 - 17x^2 - 12x + 51$; $a = -1$, $b = -2$. Solución: -1.731
- 4) $f(x) = 8x^3 - 52x^2 - 0.66x + 45 = 0$; $a = -1$, $b = 0$. Solución: -0.878
- 5) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$; $a = -3$, $b = 0$. Solución: -0.500
- 6) $f(x) = 2/x - \sqrt{x} + 3 = 0$; $a = 10$, $b = 12$. Solución: 10.214
- 7) $2x \cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ con $a = -3$ y $b = -2$. Solución: -2.190
- 8) $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ con $a = 0.2$ y $b = 0.3$. Solución: 0.297
- 9) $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ con $a = 1.3$ y $b = 2$. Solución: 1.397
- 10) $\ln(x) + x - 5 = 0$ con $a = 1$ y $b = 4$. Solución: 3.693
- 11) Encuentre una aproximación a $\sqrt[3]{25}$ con un error menor a 1×10^{-4} por medio del algoritmo de la bisección. Empiece con $a = 2.5$ y $b = 3$.

Solución: 2.9240

2. El método de Newton-Raphson

Con un error menor que una diezmilésima resuelva las siguientes ecuaciones con el método de Newton-Raphson tomando como aproximación inicial a la raíz al punto dado x_0 .

- 1) $3\cos x - x^2 = 0$ con $x_0 = \pi/4$. Solución: 1.1306
- 2) $xe^x - 2 = 0$ con $x_0 = 1$. Solución: 0.8526
- 3) $x - 2\cos x = 0$ con $x_0 = 2$. Solución: 1.0299
- 4) $x^3 - 5x = -1$ con $x_0 = -1$. Solución: 2.1284



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



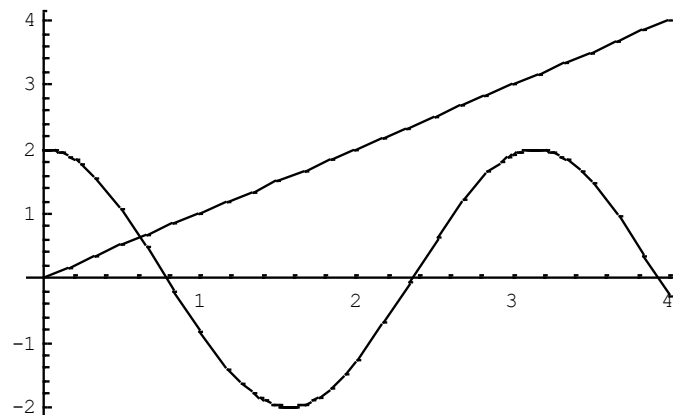
- 5) $x^3 + 4x^2 + 3x + 12$ con $x_0 = 3$. Solución: -4.0000
- 6) $(u-1)\exp(u) = 2$, con $u_0 = 2$. Solución: 1.4630
- 7) $\theta^2 \sin \theta = \cos \theta$, con $\theta_0 = 0.5$. Solución: 0.8952
- 8) $3 = t + \sqrt{t}$, con $t_0 = 5$. Solución: 1.6972
- 9) Resuelva la siguiente ecuación con el método de Newton-Raphson, con un error menor que 1×10^{-3} .

$$e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$$

Empiece con la aproximación inicial $x_0 = 1$.

Solución: 1.829

- 10) Con el método de Newton-Raphson, con un error menor que 1×10^{-6} , encuentre la abscisa del punto donde se intersecan las gráficas de las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = 2\cos(2x)$, cuyas gráficas aparecen en la figura siguiente.



Empiece con la aproximación inicial $x_0 = 1$. Solución: 0.626

- 11) El siguiente polinomio se puede usar para relacionar el calor específico a presión constante del aire seco C_p (en KJ / KgK), en función de la temperatura,

$$C_p = 0.99403 + 1.671 \times 10^{-4} T + 9.7215 \times 10^{-8} T^2 - 9.5838 \times 10^{-11} T^3 + 1.9520 \times 10^{-14} T^4$$



Use el método de Newton – Raphson para determinar la temperatura que corresponde al calor específico de 1.2 KJ / KgK. Empiece con un valor inicial de $T = 0$ y obtenga la raíz con un error menor que 1×10^{-3} .

Solución: 1126.009

12) La ecuación de estado de Beattie-Bridgeman en su forma virial es

$$pV = RT + \frac{\beta}{V} + \frac{\gamma}{V^2} + \frac{\delta}{V^3}$$

donde p = presión en atmósferas, T = temperatura en K, V = volumen molar en L/gmol, R = constante universal de los gases = 0.08205 atm · L / (gmol K), $\beta = RTB_0 - A_0 - Rc/T^2$, $\gamma = -RTB_0b + A_0a - RB_0c/T^2$, $\delta = RB_0bc/T^2$ y A_0, B_0, a, b y c = constantes particulares para cada gas. Usando el método de Newton – Raphson, calcule el volumen molar V a 100 °C y 50 atm para el O_2 , con un error no mayor que 1×10^{-2} si se sabe que: (Recuerde que $100\text{ °C} \approx 373.15\text{ K}$)

Gas	A_0	a	B_0	b	c
O_2	1.4911	0.02562	0.04624	0.004208	48000

Empiece con un valor inicial de $V = 3$ L/gmol. Sugerencia: Multiplique la ecuación por V^3 , para trasformarla en un polinomio cúbico y después sustituya los valores.

Solución: 0.61

3. El método de la secante

Resuelva las siguientes ecuaciones con el método de la secante tomando como aproximaciones iniciales los puntos indicados y con un error menor que ε .

1) $x^5 + x^2 = 9$, $x_0 = 1, x_1 = 1.5$ y $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$. Solución. 1.46905

2) $\frac{2}{v^4} = \frac{3}{v+1}$, $v_0 = 1, v_1 = 1.5$ y $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$. Solución. 1.08593

3) $(u+1)\exp(u) = 2$, $u_0 = 1.5, u_1 = 3$ y $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$. Solución. 0.3748

4) $3 = t + \sqrt{t}$, $t_0 = 0, t_1 = 5$ y $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$. Solución. 1.69722



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



5) $\exp(x) - x^2 = 2$, $x_0 = 1.3$, $x_1 = 4$ y $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$. Solución.

1.31907

6) $\theta^2 \sin \theta = \cos \theta$, $\theta_0 = \pi/4$, $\theta_1 = \pi/2$ y $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$. Solución. 0.8952

Aplique el método de la secante para obtener soluciones con una exactitud de 1×10^{-4} para los siguientes problemas. Si el método no converge efectúe solamente 10 iteraciones.

7) $x - 0.8 - 0.2 \sin x = 0$ tomando $x_0 = 0$ y $x_1 = \pi/2$. Solución: 0.9643

8) $\sin x - e^{-x} = 0$ tomando $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. Solución: 0.5885

9) $(x-2)^2 - \ln x = 0$ tomando $x_0 = e$ y $x_1 = 4$. Solución: 3.0571

10) $e^x - 3x^2 = 0$ para $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$. Solución: 0.9100

En el siguiente problema, el error debe ser menor que $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$

11) $\frac{2}{v^4} = \frac{3}{v+1}$. Empezando con los puntos $v_0 = 1$, $v_1 = 1.5$ y. Solución. 1.08593

4. El método de la regla falsa

Resuelva las siguientes ecuaciones con el método de la regla falsa con un error menor que una diezmilésima, empezando con los valores x_I y x_D indicados.

1) $x^3 - 2x^2 - 4 = 0$; $x_I = 2$, $x_D = 3$; Solución. 2.5943

2) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$; $x_I = 1$, $x_D = 2$; Solución. 1.7320

3) $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$; $x_I = -2$, $x_D = -1$; Solución. -1.7320

4) $x^2 |\sin \sqrt{x}| - 5 = 0$; $x_I = 0$, $x_D = \pi$; Solución. 2.2391

5) $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x - 6 = 0$; $x_I = 0$, $x_D = 2$; Solución. 1.8293

6) $\sin \sqrt{\sec x + x^3 \exp(5x \cot x)} = \exp(-x)$; $x_I = 0.3$, $x_D = 0.4$; Solución. 0.3291

Resuelva con el método de la falsa posición la siguiente ecuación tomando como valores iniciales los valores indicados:

7) $e^x + 2^{-x} + 2 \cos x - 6 = 0$ con $x_I = 1$ y $x_D = 3$, con error $< 1 \times 10^{-3}$. Solución: 1.829



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



8) $-\pi x^2 + 3[1 - \cos(\pi x)] = 0$, tomando $x_I = 1.2$ y $x_D = 1.4$, con error $< 1 \times 10^{-4}$.

Solución: 1.2644

9) $\sqrt{\sec x + x^3 \exp(5x \cot x)} = \exp(-x)$, con $x_I = 0.3$, $x_D = 0.4$, con error $< 1 \times 10^{-4}$.

Solución: 0.3291

10) Solucione la ecuación con un error $< 1 \times 10^{-3}$

$$x - 2 \cos 2x = 0$$

tomando $x_I = 0.5$ y $x_D = 1.5$. Respuesta: 0.626

11) La ecuación de estado de Van der Waals para un gas real es:

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = \Re T$$

donde a y b son constantes particulares para cada gas,

P = presión en atmósferas (atm).

T = temperatura en K.

$\Re$ = constante universal de los gases = 0.08205 atm-L / (gmol K).

V = volumen molar del gas en L / gmol.

Para el CO_2 , calcule V a 80°C para una presión de 30 atmósferas si $a = 3.599$ y $b = 0.042267$.

Sugerencia: Transforme la ecuación en un polinomio multiplicándola por V^2 y reacomodando los términos. Luego, aplique el método de la regla falsa con $x_I = 0.5$ y $x_D = 1.5$ para aproximar la raíz con un error no mayor que 1×10^{-2} . Solución: 0.87.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



5. Sistemas de ecuaciones lineales

1) Resuelva el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel con una exactitud de 1×10^{-4} .

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 20 & -2 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -44 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Tome como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$.

2) Resuelva el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel con una exactitud de 1×10^{-4} .

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tome como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$.

3) Resuelva el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel con una exactitud de 1×10^{-3} .

$$\begin{pmatrix} 3.44 & 6.10 & -9.1 \\ 1.99 & 17.01 & 9.6 \\ 1.6 & 1.7 & 5.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tome como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (-0.11, 0.07, 0.01)$.

4) Resuelva el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel con una exactitud de 1×10^{-3} .

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 27 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Tome como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 2, 0)$.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



5) Resuelva el siguiente sistema utilizando el método de Gauss-Seidel con una exactitud de 1×10^{-3} (Sugerencia: para aumentar la que el sistema converja, ordene las ecuaciones de tal manera que los elementos de la diagonal principal de la matriz de los coeficientes sean mayores en valor absoluto que los de las filas a las que pertenecen, es decir, que la matriz de coeficientes sea diagonal dominante).

$$3x_1 - 4x_2 + 2.4x_3 + 2x_4 = -21.3$$

$$-3x_1 + x_2 + 4.2x_3 - 3x_4 = -15.4$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + x_3 + 6.2x_4 = 1.7$$

$$4x_1 - x_2 - 3.4x_3 + 3x_4 = 10.3$$

Tome como aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 1, -4, 0)$.

6. Polinomios de Lagrange

1) En la siguiente tabla se presentan las presiones de vapor del cloruro de magnesio.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6	7
P (mm Hg)	10	20	40	60	100	200	400	760
T (°C)	930	988	1050	1088	1142	1316	1223	1418

Calcule la presión de vapor correspondiente a $T = 1000$ °C usando un polinomio de Lagrange de tercer grado.

Respuesta. Valor aproximado = 22.911207

2) Dada una función $y = f(x)$ en forma tabular, a menudo se desea encontrar un valor de x correspondiente a un valor dado de y . Este proceso, llamado interpolación inversa, se lleva a cabo en la forma usual, pero intercambiando los papeles de x y y . Dada la siguiente tabla:

Puntos	0	1	2	3	4	5	6
x	0.0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0
y	10.00	4.97	2.47	1.22	0.61	0.30	0.14

donde y es la amplitud de la oscilación de un péndulo largo, en cm y x es el tiempo medido en minutos desde que empezó la oscilación.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Encuentre un polinomio de aproximación de Lagrange de segundo grado y el valor correspondiente a $y = 2$ cm.

Respuesta. Valor aproximado = 5.526420

3) Para la función $f(x) = \ln(x+1)$, sean $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ y $x_2 = 0.9$. Construya polinomios de interpolación de Lagrange de grados uno y dos para aproximar $f(0.45)$ y calcule el error exacto.

Respuestas.

Valor aproximado con polinomio de grado uno: 0.352503, con un error exacto de 0.019061.

Valor aproximado con polinomio de grado dos: 0.368293, con un error exacto de 0.003271.

4) Use los polinomios interpolantes de Lagrange apropiados (apropiados quiere decir que hay que minimizar el error) de grado dos para aproximar lo siguiente:

(a) $f(-1/3)$ si $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$,

$f(-0.25) = 0.33493750$ y $f(0) = 1.10100000$

(b) $f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$,

$f(1.0) = 0.65809197$

Calcule el error exacto, si se sabe que los datos anteriores se generaron mediante las siguientes funciones

(a) $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$ (b) $f(x) = \sin(e^x - 2)$

Respuestas.

(a) $f\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 0.169889$, con un error exacto de 0.004630

(b) $f(0.9) \approx 0.438414$, con un error exacto de 0.005178

5) (a) Aplique la fórmula del error

$$\varepsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x-x_i)$$



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



para calcular la cota del error cometido y compárela con el error exacto en el inciso (a) del problema 45. ¿El error exacto cae dentro del intervalo que acota el error?

(b) Acote el error si se sabe que se aproximó el valor de $f(-6)$, donde $f(x) = xe^x$, evaluada en los puntos $x_0 = -7$, $x_1 = -6.5$, $x_2 = -5.3$ y $x_3 = -4.5$ con un polinomio de Lagrange de tercer grado.

Respuestas.

$$(a) \varepsilon_2\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.004630$$

$$(b) -0.000147 \leq \varepsilon_3(-6) \leq -0.000060$$

7. Polinomios de Newton en diferencias divididas

6) De la siguiente tabla

Puntos	0	1	2	3
l/r	140	180	220	240
p/a	12800	7500	5000	3800

donde p/a es la carga en lb/pulg² es la carga que causa la ruptura de una columna de hierro dulce con extremos redondeados y l/r es la razón de la longitud de la columna al mínimo radio de giro de su sección transversal, encuentre el polinomio de Newton en diferencias divididas que pasa por todos los puntos.

7) Sea la función $f(x)$ definida por medio de la siguiente tabla:

Puntos	0	1	2	3	4	5	6
x	0	1	6	8	11.5	15	19
$f(x)$	38000	38500	35500	27500	19000	15700	11000

Aproxime $f(10)$ por medio de un polinomio de Newton de segundo grado y estime el error cometido en esta interpolación. Solución. $p_2(10) = 21785.714286$, con $\varepsilon_2(10) = 97.95918$



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



8) Un anemómetro de alambre caliente es un instrumento para medir la velocidad de flujo, midiendo el efecto de enfriamiento del flujo sobre la resistencia de un alambre caliente. Los siguientes datos se obtuvieron en pruebas de calibración.

u (ft/s)	4.72	12.49	20.03	28.33	37.47	41.43	48.38	55.06	66.77	59.16
V (volts)	7.18	7.3	7.37	7.42	7.47	7.5	7.53	7.55	7.58	7.56

Construya un polinomio de Newton en diferencias divididas de tercer grado para aproximar la velocidad de flujo para cuando hay una caída de voltaje a través de la resistencia de 7.4 volts y aproxime el error si esto es posible.

Solución. $p_3(7.4) = 24.830706$, con $\varepsilon_3(7.4) = -0.090468$

9) Las densidades de las soluciones acuosas del ácido sulfúrico varían con la temperatura y la concentración de acuerdo con la siguiente tabla:

C (%)	T (°C)			
	10	30	60	100
5	1.0344	1.0281	1.0140	0.9888
20	1.1453	1.1335	1.1153	1.0885
40	1.3103	1.2953	1.2732	1.2446
70	1.6923	1.6014	1.5753	1.5417

a) Calcule la densidad a una concentración de 40 % y una temperatura de 15 °C.

b) Calcule la densidad a 30 °C y concentración de 50 %.

c) Calcule la densidad a 50 °C y 60 % de concentración.

Utilice polinomios cuadráticos de Newton en diferencias divididas en todas sus interpolaciones. (Sugerencia para (c): Construya una fila de densidades para $C = 60$ % mediante interpolaciones dejando T constante y después interpole para $T = 50$ °C con los valores de la fila construida).

Solución. (a) $p_2(15) = 1.306530$, (b) $p_2(50) = 1.388880$, (c) $p_2(50^\circ \text{C}, 60\%) = 1.466349$

10) Para la función $f(x) = \cos x$, sean $x_0 = 2.8$, $x_1 = 3.4$ y $x_2 = 3.7$. Construya un polinomio de interpolación de Newton de grado dos para aproximar $f(3.6)$ y calcule una cota para el error.

Soluciones:



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Solución. $p_2(3.6) = -0.897369$ y $-0.000893 \leq \varepsilon_2(3.6) \leq 0.001413$

8. Polinomios de Newton en diferencias finitas

1) En la tabla siguiente se define el voltaje consumido por un arco magnético, V , en función de la corriente, i .

i	1	2	3	4
V	120	94	75	62

Aproxime el valor de V para $i = 3.5$ por medio de un polinomio de Newton de grado 3 y compare con el valor dado por la fórmula empírica calculando el error porcentual.

$$v = 30.4 + 90.4i^{-0.507}$$

Solución. $p_3(3.5) = 67.8125$; $v(3.5) = 78.2989$; error % = 13.39%

2) La siguiente tabla proporciona las presiones de vapor en lb/plg² a diferentes temperaturas para el 1-3 butadieno.

Puntos	0	1	2	3	4	5
T (°F)	50	60	70	80	90	100
P (lb/plg ²)	24.94	30.11	36.05	42.84	50.57	59.30

a) Aproxime la función tabulada por un polinomio de Newton en diferencias hacia delante de grado dos e interpole la presión a la temperatura de 64 °F.

b) Interpole el valor de la presión a una temperatura de 88 °F, utilizando un polinomio de Newton en diferencias hacia atrás de grado dos.

c) Aproxime los errores correspondientes.

Solución. (a) $p_2(64) = 32.3936$; (b) $p_2(88) = 48.944$

$$(c) \varepsilon_2(64) = -0.00448; \quad \varepsilon_2(88) = 0.00192$$

3) En la siguiente tabla aparecen los valores de la entalpía, h , por unidad de masa de un plasma de Argón en equilibrio (Ar , Ar^+ , Ar^{++} , Ar^{+++} , iones y electrones) contra la temperatura.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



$T \times 10^3$ (K)	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20	22.5	25	27.5	30
h (MJ/kg)	3.3	7.5	41.8	51.8	61	101.1	132.9	145.5	171.4	225.8	260.9

Construya un polinomio de grado 3 de Newton en diferencias finitas para aproximar el valor de h a una temperatura de 19×10^3 K y aproxime el error si es posible.

Solución. 3.- $p_3(19) = 121.8736$; $\varepsilon_3(19) = 0.97216$

4) Encuentre una cota inferior y una cota superior del error de interpolación $\varepsilon_3(x)$ en $x = 6.3$ para la función $f(x) = e^x$ dada en los puntos $x_0 = 5$, $x_1 = 6$, $x_2 = 7$ y $x_3 = 8$.

Solución. $2.869939 \leq \varepsilon_3(6.3) \leq 57.644275$

9. Polinomios de Taylor

1) Desarrolle el polinomio de Taylor de grado tres de la función $y = \sqrt{x}$, alrededor del punto $a = 1$ y exprese el error en la forma modificada de Lagrange.

Solución.

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2} \frac{x-1}{1} - \frac{1}{4} \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{3}{8} \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{5}{16} \frac{(x-1)^4}{4!} [1 + \theta(x-1)]^{-7/2}, \text{ con } 0 < \theta < 1$$

56) Valiéndose de la fórmula aproximada $e^x \approx 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, hallar $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ y acotar el error.

Solución. $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = 0.78$ con un error < 0.01 .

2) Evaluar $\cos 20^\circ$ por medio de un polinomio de Taylor de grado cuatro, alrededor del cero y determine el error.

Solución. $\cos 20^\circ = 0.939$ con un error < 0.001 .

3) Encontrar el polinomio de Taylor de segundo grado de la función $f(x) = \sqrt{1+x}$ alrededor del punto $a = 0$ y evalúe el error de la igualdad aproximada cuando $x = 0.2$



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Solución. $p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$; $f(0.2) = \sqrt{1.2} \approx p_2(0.2) = 1.095$, con un error < 0.001

4) Encontrar el polinomio de Taylor de cuarto grado de la función $f(x) = \ln x$ alrededor de $a = 1$. Con la aproximación obtenida calcular $\ln 1.1$ y evaluar el error. Luego, hallar el grado necesario del polinomio de Taylor para $f(x) = \ln x$, desarrollada alrededor de $a = 1$, que garantice una exactitud de por lo menos 1×10^{-10} , en la aproximación de $\ln 1.1$.

Solución. $p_4(1.1) = 0.09531$, con un error < 0.00001 ; el grado del polinomio de Taylor deberá ser por lo menos 9 para que el error sea menor que 1×10^{-10} .

5) Evaluar la integral de probabilidad

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

utilizando un polinomio de grado 10 en el entorno de $a = 0$.

Solución. $\int_{-3}^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \approx -0.345035$, que es muy diferente al valor verdadero de la integral, que es 0.9973, lo cual nos indica que la aproximación que obtuvimos con un polinomio de grado 10, es bastante inexacta.

6) Aproxime la integral $\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{x-\pi}} dx$ desarrollando $\cos x$ en un polinomio de Taylor de grado seis alrededor de π y efectuando la integral resultante. Utilice aritmética de redondeo a diezmilésimas.

6) Sea $\alpha = c(2) = \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$, la cual es una integral de Fresnel, que aparece en óptica.

Las luces traseras de los automóviles tienen frecuentemente lentes de Fresnel cuyas ranuras tienen su espaciado gobernado por las integrales de Fresnel. Calcule $c(2)$ desarrollando la función coseno en polinomio de Maclaurin de grado seis.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



7) Si una onda en el agua con longitud L se mueve con velocidad v a través de una masa de agua de profundidad d , entonces

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

(a) Si el agua es profunda, muestre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$

(b) Si el agua es baja, use el polinomio de Maclaurin de la tangente hiperbólica, $\tanh$, para mostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Así, en agua baja la velocidad de una onda tiende a ser independiente de la longitud de la onda.)

8) El peso (la fuerza debida a la gravedad) de un objeto de masa m situado a una altura de x km sobre la superficie de la Tierra es $w(x) = \frac{mgR^2}{(R+x)^2}$, donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad. Use el polinomio de Maclaurin de grado uno que aproxime a $w(x)$, y úselo para estimar qué tan grande tendría que ser x para reducir el peso en 10%.

Solución. $x \approx 0.05R$, donde R es el radio de la Tierra.

9) Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas eléctricas de igual magnitud y signos contrarios. Si las cargas son q y $-q$ y están a una distancia d una de otra, entonces el campo eléctrico E en un punto P , como en la figura que sigue es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2} \right]$$

Muestre que E es aproximadamente proporcional a $1/D^3$, desarrollando esta expresión para E como una serie de potencias de d/D , cuando P está lejano del dipolo.

10) La resistividad ρ de un alambre conductor es el recíproco de la conductividad, y se expresa en unidades de ohm-metros ($\Omega\cdot m$). La resistividad de cierto metal depende de la temperatura y se describe mediante la ecuación.

$$\rho(T) = \rho_{20} \exp[\alpha(T - 20)]$$



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



donde T es la temperatura en $^{\circ}\text{C}$. Existen tablas que contienen los valores del coeficiente de temperatura, α , y de la resistividad a 20°C , ρ_{20} , para diversos metales. Salvo a muy bajas temperaturas, la resistividad varía casi linealmente en función de la temperatura; por ello se acostumbra a aproximar la expresión para $\rho(T)$ mediante su polinomio de Taylor de primero o segundo grado en $T = 20$.

- (a) Deduzca expresiones para las aproximaciones lineal y cuadrática.
- (b) Para el cobre, las tablas dan $\alpha = 0.0039/^{\circ}\text{C}$ y $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega - \text{m}$. Grafique la resistividad del cobre y las aproximaciones lineal y cuadrática para $-250^{\circ}\text{C} \leq T \leq 1000^{\circ}\text{C}$. Para eso puede usar su calculadora en el modo table para generar los valores necesarios para la gráfica.

10. Derivación numérica

- 1) A partir de la siguiente tabla, aproximar $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1.23}$ con un polinomio de Newton de tercer grado y estimar el error, en caso de ser posible.

Puntos	0	1	2	3	4	5	6
x_i	1.00	1.10	1.18	1.30	1.35	1.42	1.5
y_i	1.218283	2.249462	1.272675	1.304726	1.317140	1.333631	1.351262

Respuesta: $p_3'(1.23) = 0.544284$ y error ≈ 0.216408

- 2) En la siguiente tabla

t	0	1	2	3	4	5
T	93.1	85.9	78.8	75.1	69.8	66.7

T representa la temperatura, en $^{\circ}\text{C}$ de una salmuera utilizada como refrigerante y t (min) es el tiempo. Encuentre la velocidad de enfriamiento en los tiempos $t = 1.0$ y $t = 4$ min con polinomios de Newton de grado dos en diferencias finitas hacia delante y hacia atrás, respectivamente. Use las fórmulas del término siguiente para aproximar los errores.

Respuestas: $p_2'(1) = -7.15$ y error ≈ -0.55 ; $p_2'(4) = -4.2$ y error ≈ -0.63

- 3) En una reacción química $A + B \rightarrow \text{Productos}$, la concentración del reactante A es una función de la presión P y la temperatura T. La siguiente tabla presenta la concentración de A en gmol / L como función de estas dos variables.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



	T			
P(kg / cm ²)	273	300	325	360
1	0.99	0.97	0.96	0.93
2	0.88	0.82	0.79	0.77
8	0.62	0.51	0.48	0.45
15	0.56	0.49	0.46	0.42
20	0.52	0.44	0.41	0.37

- a) Calcule la tasa de cambio de la concentración de A con la temperatura a $P = 15 \text{ kg / cm}^2$ y $T = 300 \text{ K}$, usando un polinomio de Newton de segundo grado. (Sugerencia:

lo que se busca es $\left. \frac{\partial C_A}{\partial T} \right|_{P=15, T=300}$ y para hacer esto sólo hay que dejar fija la presión

y tomar C_A y T como variables). Aproxime el error si esto es posible. Respuesta:

$$p_2'(300) = -0.0027 \text{ con } \varepsilon_2(300) \approx -0.000393$$

- b) Calcule la tasa de cambio de la concentración de A con la presión a $P = 2 \text{ kg / cm}^2$ y $T = 325 \text{ K}$, usando un polinomio de Newton de segundo grado. (Sugerencia: lo que

se busca es $\left. \frac{\partial C_A}{\partial P} \right|_{P=2, T=325}$ y ahora hay que dejar fija a la temperatura y tomar a C_A y

P como variables). Aproxime el error si esto es posible. Respuesta.

$$p_2'(2) = -0.153095 \text{ con error} = 0.005636$$

- 4) La ecuación de Van der Waals para un gmol de CO_2 es

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = \Re T$$

donde $a = 3.6 \times 10^{-6} \text{ atm cm}^6 / \text{gmol}$

$$b = 42.8 \text{ cm}^3$$

$$\Re = 82.1 \text{ atm cm}^3 / (\text{gmol K})$$

Si $T = 350 \text{ K}$, se obtiene la siguiente tabla de valores

Puntos	0	1	2	3
$p \text{ (atm)}$	13.782	12.577	11.565	10.704
$v \text{ (cm}^3\text{)}$	2000	2200	2400	2600



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Calcule $\partial p / \partial v$ cuando $v = 2350 \text{ cm}^3$ con un polinomio de Newton de tercer grado y compárelo con el valor de la derivada analítica. (Sugerencia: Note que las abscisas son equidistantes, por lo que es preferible usar un polinomio de Newton en diferencias finitas). Solución. Resolviendo analíticamente, la respuesta es: $\left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{v=2350} = -0.005398$ y numéricamente, $p'_3(2350) = -0.004843$

5) Obtenga una fórmula para la derivada de un polinomio interpolante de Lagrange de grado n , con las técnicas vistas en clase para derivar los polinomios de Newton.

Solución. $\frac{dp_n(x)}{dx} = \sum_{i=0}^n f(x_i) \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x - x_j} \right]$, aunque esta fórmula no sirve para

evaluar la derivada en las abscisas de los puntos tabulados porque se indetermina en cualquiera de ellos, pero con un poco de álgebra se puede escribir como

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \sum_{k=0}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k, j \neq i}}^n (x - x_j)$$

6) (a) Aproxime $f'(\pi/4)$ y $f''(\pi/4)$, con $f(x) = \sin x$ y $h = \pi/12$, usando las fórmulas en diferencias hacia adelante

$$f'(x_i) = \frac{1}{h} \left[\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1} \Delta^j f(x_i)}{j} \right]$$

$$\text{y } f''(x_i) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f(x_i) - \Delta^3 f(x_i) + \frac{11}{12} \Delta^4 f(x_i) - \frac{5}{6} \Delta^5 f(x_i) + \dots \right]$$

usando sólo el primer término, los dos primeros términos y los tres primeros términos. (b) Haga lo mismo, pero con las fórmulas en diferencias centradas para la primera y segunda derivada de f usando el mismo valor de h y estime el error porcentual para cada aproximación. Compare sus resultados. ¿Cuál fórmula le parece la mejor?

Fórmula en diferencias finitas para la primera derivada.

Con un término: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.607022$, error = 0.100085



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Con dos términos: $f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx 0.719736$, error = - 0.012629

Con tres términos: $f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx 0.711065$, error = - 0.00396

Fórmula en diferencias finitas para la segunda derivada.

Con un término: $f'' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx - 0.861073$, error = 0.153966

Con dos términos: $f'' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx - 0.761713$, error = 0.054606

Con tres términos: $f'' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx - 0.701676$, error = - 0.00543

Fórmula en diferencias centradas para la primera derivada.

$f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx 0.699057$, error = 0.008050

Fórmula en diferencias centradas para la segunda derivada.

$f'' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx -0.703077$, error = - 0.004030

7) Calcule las aproximaciones $y'(x)$ y $y''(x)$ con la fórmula en diferencias centradas para obtener un error de orden $O(h^2)$, para cada una de las siguientes funciones en la ubicación especificada, usando el tamaño de h indicado

a) $y = x^3 + 4x - 15$ en $x = 0$, con $h = 0.5$

b) $y = x^2 \cos x$ en $x = 0.5$, con $h = 0.2$

c) $y = e^x \tan(x/3)$ en $x = 3$, con $h = 0.1$

Primeras derivadas: (a) 4.25; (b) 0.721981; (c) 54.573328

Segundas derivadas: (a) cero; (b) 0.549042; (c) 101.408047

8) Calcule las aproximaciones $y'(0.975)$ y $y''(1.050)$, con la fórmula en diferencias centradas para obtener un error de orden $O(h^2)$, para la siguiente función

Puntos	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0.925	0.950	0.975	1.000	1.025	1.050	1.075	1.100
$y(x_i)$	0.496772	0.490784	0.485006	0.479426	0.474032	0.468816	0.463767	0.458877



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Respuestas: $y'(0.975) = -0.22716$ y $y''(1.050) = 0.26720$

9) La primera ley de difusión de Fick establece que

$$\text{Flujo de masa} = -D \frac{dc}{dx}$$

donde el flujo de masa = cantidad de masa que pasa a través de una unidad de área por unidad de tiempo ($\text{g/cm}^2/\text{s}$), D = coeficiente de difusión (cm^2/s), c = concentración y x = distancia (cm). Un ingeniero en sistemas ambientales mide la concentración, que se presenta a continuación, de un contaminante en los sedimentos en el fondo de un lago ($x = 0$ en la interfase sedimento-agua y aumenta hacia abajo):

x , cm	0	1	2	3
c , 10^{-6} g/cm^3	0.06	0.32	0.46	0.60

Estime la derivada en $x = 0$ y emplee esta estimación junto con la primera ley de Fick para calcular el flujo de masa del contaminante que se desprende de los sedimentos hacia las aguas superiores. Tome $D = 1.52 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$. Para un lago con $3.6 \times 10^6 \text{ m}^2$ de sedimentos, ¿cuánto contaminante será transportado hacia el lago durante un año? Utilice la fórmula en diferencias hacia delante con todos los términos posibles, dado el número de datos.

Respuesta. $\frac{dc(0)}{dx} = 3.6 \times 10^{-7} \frac{\text{g}}{\text{cm}^4}$, Flujo de masa = $-5.472 \times 10^{-13} \frac{\text{gm/cm}^2}{\text{s}}$

En una superficie de $3.6 \times 10^6 \text{ m}^2$ de sedimentos que ocupa el lago hay un transporte de 621.2 kg de contaminante hacia el lago por año.

10) Las alturas de las olas h (dadas en pies) en el mar abierto dependen sobre todo de la velocidad v , del viento (dada en nudos) y del tiempo t (dado en horas) que el viento sople a esa velocidad. Así que h es una función de v y de t , por lo que podemos expresar $h = f(v, t)$. Los oceanógrafos y meteorólogos han llevado a cabo las observaciones y mediciones que se registran en la tabla siguiente.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

La altura de las olas como una función de la velocidad y el tiempo.

- a) Calcule $\frac{\partial h}{\partial v}(v=30, t=20)$ y $\frac{\partial h}{\partial t}(v=30, t=20)$, una con la fórmula en diferencias centradas y la otra mediante la fórmula en diferencias hacia delante con dos términos. ¿En qué casos se puede aplicar una fórmula u otra? Explique.

Respuestas: $\frac{\partial h}{\partial v}(v=30, t=20)=1$ y $\frac{\partial h}{\partial t}(v=30, t=20)=\frac{1}{10}$

- b) Encuentre una aproximación afín para la altura de las olas $h=h(v, t)$, cuando v se aproxima a 30 nudos y t está cerca de 20 horas. Úsela para estimar la altura de las olas cuando la velocidad es 32 nudos y el tiempo es de 23 horas. (Es decir, que hay que encontrar la ecuación del plano tangente, $T(v, t)=h(30, 20)+\frac{\partial h(30, 20)}{\partial v}dv+\frac{\partial h(30, 20)}{\partial t}dt$, a la gráfica de la función que pasa por el punto $(30, 20)$.) Respuesta: 19.3 pies.

- c) ¿En cuánto incrementa aproximadamente la altura de las olas cuando v pasa de 30 a 28 nudos y t se incrementa de 20 a 22 horas? (Aquí puede usar la diferencial de la función,



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



$$dh = \frac{\partial h}{\partial v} dv + \frac{\partial h}{\partial t} dt, \text{ para evaluar el incremento.) Respuesta: -1.8 pies, lo que}$$

quiere decir que la altura de las olas disminuye en 1.8 pies, aproximadamente.

11) Los datos de presión-temperatura-volumen para el etano se muestran en la tabla siguiente, donde la temperatura (T) está en °C, la presión (P) en atmósferas y el volumen específico (1/V) en moles/litro.

T	P						
	1	2	4	6	8	9	10
25	20.14	32.84	-	-	-	-	-
75	24.95	43.80	68.89	85.95	104.38	118.32	139.23
150	31.89	59.31	106.06	151.38	207.66	246.57	298.02
200	36.44	69.38	130.18	194.53	276.76	332.56	-
250	40.87	79.16	153.59	237.38	345.38	-	-

Con la ecuación del plano tangente, aproxime el valor del volumen específico para una temperatura de 197 °C y una presión de 6.5 atmósferas. Para el cálculo de las derivadas parciales use diferencias centradas.

Solución. 210.27 moles/litro

11. Integración numérica

Métodos de Newton-Cotes

1) Use medios analíticos para evaluar las siguientes integrales hasta millonésimas.

(a) $\int_{-2}^4 (1 - x - 4x^3 + x^5) dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} (8 + 4 \sin x) dx$

Solución. (a) 432; (b) 16.566371

2) Emplee la regla trapezoidal simple para evaluar las integrales del problema 1 y calcule el error porcentual para evaluar la exactitud de la aproximación.

Respuestas: (a) 2304, con error = - 433.3%; (b) 15.707963, con error = 5.18%



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



3) Evalúe las integrales del problema 1 con la regla de Simpson simple de 1/3 y calcule el error porcentual.

Solución. (a) 756, con error = - 75%; (b) 33.150980, con error = - 100.11

4) Evalúe las integrales del problema 1 con la regla trapezoidal compuesta, dividiendo el intervalo de integración en el número mínimo de subintervalos que son necesarios para usar la fórmula y calcule el error porcentual.

Solución. (a) 1143, con error = - 164.6% ; (b) 16.358608, con error = 1.25%.

5) Evalúe las integrales del problema 1 con la regla de Simpson compuesta de 1/3, dividiendo el intervalo de integración en el número mínimo de subintervalos que son necesarios para usar la fórmula y calcule el error porcentual.

Solución. (a) 455.25, con error = 5.38%; (b) 18.661300, con error = - 12.65%

Ahora compare los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores. ¿Qué fórmulas ofrecen las mejores aproximaciones? Argumente.

6) Integre la siguiente función, $\int_0^1 x^{0.1}(1.2-x)(1-e^{20(x-1)})dx$, por medio de los métodos

trapezoidal compuesto y Simpson compuesto, dividiendo el intervalo de integración, primero en $n = 8$ subintervalos y después en el doble, es decir, $n =$ ¿Cuántas cifras decimales coinciden, para cada método, entre la primera y la segunda aproximación? Esta es la manera en que uno puede conseguir un grado de exactitud deseado. Si el número de cifras que coinciden no son las que uno desea, se vuelve a subdividir el intervalo de integración en el doble de subintervalos, o sea $n = 32$. El valor real, aproximado hasta millonésimas, es 0.602297, valor que pueden conseguir si programan el método de Simpson de 1/3 compuesto y dividen el intervalo de integración en 18000 subintervalos.

Solución.

Con el método trapezoidal, para $n = 8$ subintervalos, la integral es 0.547270, para $n = 16$, la integral es 0.577491 y para $n = 32$, la integral es 0.632172.

Con el método de Simpson de 1/3 compuesto, para $n = 8$ subintervalos, la integral es 0.570168, para $n = 16$, la integral es 0.587565 y para $n = 32$, la integral es 0.652954.

7) La función $f(x) = e^{-x}$, se puede usar para generar la siguiente tabla de datos desigualmente espaciados:

x	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.95	1.2
$f(x)$	1	0.9048	0.7408	0.6065	0.4966	0.3867	0.3012

Evalúe la integral desde $a = 0$ hasta $b = 1.2$ con (a) medios analíticos, (b) regla trapezoidal y (c) una combinación de las reglas trapezoidal y de Simpson; emplee las reglas de



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Simpson donde sea posible para obtener la mayor exactitud. Para (b) y (c), calcule el error porcentual.

Solución. (a) 0.6988; (b) 0.7012, con error = - 0.34%; (c) 0.6989, con error = - 0.01%

8) Utilice la fórmula de Simpson compuesta para evaluar $\int_0^4 f(x)dx$

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$f(x)$	0.0	0.632351	1.143678	1.375527	1.343770	1.005639	0.283447	-0.876705	-2.430589

Solución. $\int_0^4 f(x)dx = 1.943075$

9) Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, 1]$, como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 - x, & \text{si } 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

Aproxime numéricamente $\int_0^1 f(x)dx$ utilizando la fórmula de Simpson de 1/3, dividiendo el intervalo de integración en 8 intervalos. Solución. 0.698

10) Sea la función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, 1]$, como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1.375 - x^3, & \text{si } 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

Aproxime numéricamente $\int_0^1 f(x)dx$. Utilice $n = 10$.

11) En el gasoducto Cactus, Tabasco a Reynosa, Tamaulipas, se determina el gasto W (kg/min) y su contenido de azufre S (en tanto por ciento) periódicamente durante el día. Los resultados se presentan en la tabla:

t (horas)	0	4	8	12	15	20	22	24
W (kg/min)	20	22	19.5	23	21	20	20.5	20.8



S(%)	0.30	0.45	0.38	0.35	0.30	0.43	0.41	0.40
------	------	------	------	------	------	------	------	------

- ¿Cuál es el gasto promedio diario?
- ¿Qué cantidad de gas se bombea en 24 horas?
- ¿Cuál es el contenido de azufre (%) promedio diario?
- ¿Qué cantidad de azufre se bombea en 24 horas?

Sugerencia: el gas bombeado se calcula multiplicando el gasto por el tiempo; pero como el gasto es variable, se aplica la integral: (¡Cuidado con las unidades!)

$$G = \text{Cantidad de gas bombeado} = \int_0^{24} W dt \text{ kg de gas}$$

y el gasto promedio diario se calcula como $G_{\text{PROM}} = G / \text{tiempo transcurrido}$.

Soluciones. (a) 1255.75 kg / h, o bien, 1254.04 kg / h, dependiendo de cómo se haya efectuado la integración; (b) Únicamente con la fórmula trapezoidal se obtiene, 30138 kg y con una combinación de las fórmulas de Simpson de 1/3 y 3/8, junto con la trapezoidal simple el resultado es 30097 kg; (c) 0.378% por hora, o bien, 0.382% por hora, dependiendo de cómo se haya efectuado la integral; (d) Únicamente con la fórmula trapezoidal se obtiene, 113.907 kg de azufre; (d) Con una combinación de las fórmulas de Simpson de 1/3 y 3/8, junto con la trapezoidal simple el resultado es 114.863 kg de azufre.

12) Calcule el cambio de entropía ΔS que sufre un gas ideal a presión constante al cambiar su temperatura de 280 a 430 K usando el método de Simpson compuesto de 1/3 si se sabe

$$\text{que } \Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_P dT}{T}$$

T(K)	280	310	340	370	400	430	460
C_P (cal/mol K)	4.87	5.02	5.16	5.25	5.30	5.37	5.45

Solución. 2.58

13) Se inyecta un colorante al torrente circulatorio de un paciente para medir su salida cardíaca, que es la tasa de flujo volumétrico de la sangre del ventrículo izquierdo del corazón. En otras palabras, la salida cardíaca es el número de litros de sangre que el corazón bombea por minuto. Para una persona en reposo, la tasa puede ser de 5 o 6 litros por minuto. Si se trata de un maratonista durante la carrera, la salida cardíaca puede ser tan elevada como 30 L/min. Los datos siguientes muestran la respuesta de un individuo cuando se inyectan 5 mg de colorante en el sistema vascular.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Tiempo (seg)	2	6	9	12	15	18	20	24
Concentración (mg/L)	0	1.5	3.2	4.1	3.4	2	1	0

Ajuste una curva polinomial a través de los puntos de los datos y use la función para aproximar la salida cardíaca del paciente, que se puede calcular con:

$$\text{Salida cardíaca} = \frac{\text{cantidad de colorante}}{\text{área bajo la curva}} \left(\frac{\text{L}}{\text{min}} \right)$$

14) La masa total de una barra de densidad variable está dada por

$$m = \int_0^L \rho(x) A_c(x) dx$$

donde m es la masa, $\rho(x)$ es la densidad, $A(x)$ es el área de la sección transversal, x es la distancia a lo largo de la barra y L es la longitud total de la barra. Se midieron los datos siguientes para una barra de 10 metros de longitud. Determine la masa en kilogramos con la mejor exactitud posible.

$x, \text{ m}$	0	2	3	4	6	8	10
$\rho(x), \text{ g/cm}^3$	4.00	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
$A_c, \text{ cm}^2$	100	103	106	110	120	133	150

15) Un estudio de ingeniería de transporte requiere que usted determine el número de autos que pasan por una intersección cuando viajan durante la hora pico de la mañana. Usted se para al lado de la carretera y cuenta el número de autos que pasan cada cuatro minutos a varias horas, como se muestra en la tabla a continuación. Utilice el mejor método numérico para determinar (a) el número total de autos que pasan entre las 7:30 y las 9:15, y (b) la tasa de autos que cruzan la intersección por minuto. (Atención: cuidado con las unidades).



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



Tiempo, (horas)	7:30	7:45	8:00	8:15	8:45	9:15
Tasa (autos por cada 4 minutos)	18	24	14	24	21	9

12. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Dados los siguientes problemas de valor inicial, use el método de Euler para obtener aproximaciones de 5 decimales al valor indicado. Divida el intervalo $[x_0, x_f]$ en $n = 5$ subintervalos.

1) $y' = xy + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $y(0.5)$. Solución: 1.69024

2) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 2$; $y(0.5)$. Solución: 10.52869

3) $y' = 1 - 4x^3y$, $y(0) = 1$; $y(2)$. Solución: 5.03456

4) $y' + 2xy - \exp(-x^2) = x$, $y(0) = 1$; $y(1.5)$. Solución: 0.712081

5) Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando el método de Euler mejorado para obtener una aproximación de cienmilésimas al valor indicado. Divida el intervalo $[x_0, x_f]$ en $n = 5$ subintervalos.

$y' = xy^2 - \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$ Solución: 1.32597

6) Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando el método de Euler mejorado para obtener una aproximación de cienmilésimas al valor indicado. Divida el intervalo $[x_0, x_f]$ en $n = 4$

$y' = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$, $y(0) = 0$; $y(2)$ Solución: 0.956538

Resuelva el siguiente problema de valor inicial usando el método de Euler mejorado para obtener una aproximación de 5 decimales al valor indicado. Divida el intervalo $[x_0, x_f]$ en $n = 5$ subintervalos.

7) $y' = y - y^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$ Solución: 0.62241

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial usando el método de Taylor de tres términos para obtener una aproximación de 5 decimales al valor indicado. Divida el intervalo $[x_0, x_f]$ en $n = 5$ subintervalos.

.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



8) $y' = xy^2 - \frac{y}{x}$, $y(1) = 1$; $y(1.5)$ Solución. 1.322554

9) $y' = y - y^2$, $y(0) = 0.5$; $y(0.5)$ Solución. 0.622553

10) $y' = xy + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $y(0.5)$ Solución. 1.752165

11) Usando el método de Runge – Kutta de cuarto orden, con $n = 4$, resuelva la ecuación diferencial siguiente y evalúe $y(2)$.

$$(2x + y) \frac{dy}{dx} + x - 2y = 0, \text{ sujeta a la condición inicial, } y(1) = 0$$

Solución. $y(2) = -0.809171$

12) Un tanque cilíndrico de 5 m de diámetro y 11 m de largo aislado con asbesto se carga con un líquido que está a 220° F y el cual se deja reposar durante veinte horas. A partir de los datos de diseño del tanque, las propiedades térmicas y físicas del líquido, y el valor de la temperatura ambiente, se encuentra la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = 0.615 + 0.175 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - 0.0114T$$

que relaciona la temperatura T del líquido (en °C) con el tiempo t en horas. ¿Cuál es la temperatura final del líquido? Use el método de Runge – Kutta de 4° orden con $h = 10$ horas.

13) Use el método de Runge – Kutta de cuarto orden para calcular $y(3)$, si $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial. Utilice $n = 4$ subintervalos.

$$y' = -\frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ sujeta a la condición inicial } y(1) = 0.56$$

Solución. $y(3) = 0.200609$

14) Use el método de Runge – Kutta de cuarto orden para calcular $y(2)$, si $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial. Utilice $n = 4$ subintervalos.



Instituto Politécnico Nacional
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas
Guía para métodos numéricos



$$y' = 0.3 + x \sin(xy), \text{ sujeta a la condición inicial } y(0) = 0.12$$

Solución. $y(2) = 1.636713$

15) Encuentre $y(3)$ si se sabe que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial,

$$y' + 2xy - e^{-x^2} = x, \text{ y que } y(0) = 1. \text{ Use el método de Runge-Kutta de 4º orden y use } n = 2.$$

16) Un modelo matemático para el área A (en cm^2) que ocupa una colonia de bacterias (B.

Dendroides) está dado por $\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A)$. Si $A(0) = 0.24 \text{ cm}^2$, use el modelo

de Runge-Kutta de cuarto orden para completar la siguiente tabla. Use $h = 1$.

t (días)	1	2	3	4
A (observada)	2.78	13.53	36.30	47.50
A (aproximada)				

Solución.

t (días)	1	2	3	4
A (aproximada)	1.93	12.50	36.46	47.23

17) La población de aves en una isla tiene un crecimiento que se puede describir con la ecuación diferencial $dN/dt = (3\sin 2\pi t)N$, donde t es el tiempo en años y $t = 0$ corresponde al principio de la primavera. La migración hacia la isla o desde la isla se da por estaciones. La intensidad de la migración está dada por $M(t) = 2000 \sin 2\pi t$ aves por año. Por lo tanto, la ecuación diferencial completa para la población es

$$\frac{dN}{dt} = (3\sin 2\pi t)N + 2000 \sin 2\pi t$$

Calcule N al principio del verano de ese mismo año suponiendo que la población en $t = 0$ es de 500 aves, usando el método de Runge - Kutta de cuarto orden. Utilice $n = 4$ subintervalos.

Solución. $N = 1214$.